EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL

TEMA 3

ESPACIOS EUCLÍDEOS

ESPACIOS EUCLÍDEOS

1) a) Decir cuál de las siguientes aplicaciones de $\Re^2 \times \Re^2$ en $\Re$ define un producto escalar en $\Re^2$, en el caso de no definir un producto escalar comprobar el axioma que falla:

a1) $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

a2) $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = (x,y)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

a3) $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

a4) $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

b) Estudiar si las siguientes aplicaciones de $\Re^3 \times \Re^3$ en $\Re$ define un producto escalar en $\Re^3$:

$$\varphi\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

c) Dadas A y B $\in M_{mxn}(\Re)$ se define < A, B > = traza (A B^t). Demuestre que esta aplicación cumple las propiedades de un producto escalar en $M_{mxn}(\Re)$. Para el caso m = n = 2, halle la matriz de Gram con respecto la base usual de $M_{mxn}(\Re)$.

2) Encuentre los cosenos de los ángulos entre la recta $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$ y los ejes coordenados en $\Re^n$ con el producto escalar usual.

3) En el espacio vectorial $\Re^3$ se considera una base B = { e_1, e_2, e_3 } y un producto escalar < x, y > , con norma asociada || x || ,tal que:

$\| e_1 \| = \| e_3 \| = 3$; $\| e_2 \| = 2$; ángulo (e_1, e_2) = ángulo (e_2, e_3) = $\frac{\pi}{3}$ ángulo (e_1, e_3) = $\frac{\pi}{2}$.

a) Halle la matriz de Gram en la base B.
b) Halle la matriz de Gram en la base B´ = { e1 – e3, e2 + e3, –e2 + e3 }.

Bases ortonormales, complemento ortogonal y proyecciones

4) Sea W = L { u_1 = (1, 2, 0, 0), u_2 = (1, 0, 0, 2), u_3 = (1, –1, –1, 2) } $\subset \Re^4$ con el producto escalar usual.
a) Encuentre una base ortonormal de W.
b) Complete la base hallada hasta obtener una base ortonormal de $\Re^4$. Calcule $W^\perp$.
c) Obtenga las coordenadas del vector (1,1,-1,1) respecto de la base ortonormal de $\Re^4$ obtenida en b).
d) Obtenga la proyección ortogonal del vector (1,1,-1,1) sobre $W^\perp$.

5) Halle una base ortonormal de los siguientes subespacios euclídeos y los subespacios ortogonales (dando ecs. implícitas, paramétricas y base de los subespacios ortogonales):
a) S = { (x, y, z) $\in \Re3$ / x + 2y – z = 0} con el producto usual de $\Re^3$.
b) T=L{(1,-1,0), (1,1,0)} con el producto escalar dado por la siguiente matriz de Gram en B_c

$$G(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

c) U = L { (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, – 1) } con el producto escalar usual de $\Re^4$.

6) Se define un producto escalar en $\Re^3$ de forma que el conjunto siguiente sea una base ortonormal $\{ u_1 = (-2, -1, 1), u_2 = (0, -1, 0), u_3 = (1, -1, 0) \}$. Encuentre la matriz de este producto escalar con respecto a la base canónica.

7) En $\Re^4$ con el producto escalar usual, halle la proyección ortogonal del vector (0, 2, 1, –1) sobre el subespacio $U = \{ (x, y, z, t) \in \Re^4 / z + y = 0 \}$. Calcule el coseno del ángulo que forman (0, 2, 1, -1) y U. Calcule la distancia de (0, 2, 1, -1) a $U^\perp$ y a U.

8) En el espacio $\Re^3$, se define el producto escalar cuya matriz de Gram en B_c es $G(B_c) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre una base ortonormal.
b) Obtenga el subespacio complemento ortogonal de L{(1,0,0)}.
c) Encuentre la proyección ortogonal de (-1,0,1) sobre el subespacio L{(1,0,0), (0,1,0)}.
d) Encuentre el elemento de L{(1,0,0), (0,1,0)} que está a distancia mínima de (-1,0,1).

9) En $\Re^3$ con el producto escalar definido en la base $B = \{ u_1, u_2, u_3 \}$, por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcule la proyección ortogonal de u_3 sobre $L\{ u_1, u_2 \}$.

10) En $\Re^3$ se consideran el producto escalar cuya matriz con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el subespacio $U = \{ (x, y, z) / x = -z = y \}$.
a) Calcule el ángulo que forman los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 0).
b) Encuentre una base de $U^\perp$.
c) Encuentre la proyección ortogonal de (1, –2, 0) sobre $U^\perp$.
d) Calcule el coseno del ángulo que forman (1,-2,0) y $U^\perp$.
e) Calcule la distancia de (1,-2,0) a U.

11) En $\Re^3$ se consideran la base canónica $B = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ y el producto escalar definido por:
$\| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1$ y ángulo $(e_i, e_j) = 60^o$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{ 1, 2, 3 \}$. Calcule:
a) La matriz de Gram en la base B.
b) La distancia del punto P = (1, 2, 3) al origen.
c) Las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta x = y = z sobre el plano y = 0.

12) En $\Re^4$ con el producto escalar usual, halle la distancia del vector (1, 0, –1, 0) a $S:\left\{ \begin{array}{c} x + y = 0 \\ y + z - t = 0 \end{array} \right\}$ y el complemento ortogonal de S, dando una base de $S^\perp$, y unas ecuaciones paramétricas e implícitas de $S^\perp$.

13) En $\Re^3$ se considera el producto escalar definido por la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica.

¿Cuál es el plano ortogonal al vector c = (1,1,0)? Obtenga una base y unas ecuaciones paramétricas e implícitas de dicho plano ortogonal a c = (1,1,0).

Diagonalización ortogonal

14) a) Halle una base ortonormal de $\Re^3$ formada por vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Descomponga el vector (–1, 1, 1) según los subespacios propios de A.

b) Halle una base ortonormal de $\Re^3$ formada por vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Descomponga el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ según los subespacios propios de A.

15) Sea B = {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 0)} una base de $\Re^3$ y f: $\Re^3 \to \Re^3$ lineal. Estudie si f es simétrica en los casos:

a) $M_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.   b) $M_f(B, B) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

16) Diagonalice ortogonalmente las matrices :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

17) Diagonalice ortogonalmente, si es posible, las aplicaciones T_1, T_2: $M_{2x2}(\Re) \to M_{2x2}(\Re)$ definidas por $T_1(A) = A^t$ y $T_2(A) = A - A^t$ con el producto escalar $\langle A, B\rangle$ = traza $(A B^t)$.

18) Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ \lambda & \beta & \gamma \\ \mu & \gamma & \nu \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\Re)$ tal que: $\alpha \neq 0$, rang (A) = 1 y traza (A) = 1. ¿Es A diagonalizable?.

En caso afirmativo, halle sus autovalores. ¿Qué representa geométricamente A?

19) Sea $A \in M_{2x2}(\Re)$ una matriz simétrica tal que $\sigma(A)=\{1, 9\}$ y u = (1, 1) es un autovector asociado al autovalor 1. Halle razonadamente :

a) Un autovector asociado al autovalor 9.
b) La matriz A.
c) Una matriz B tal que $B^2 = A$.

20) Sea *f* un endomorfismo de $\Re^3$. Calcule la matriz $A = M_f(B_c, B_c)$ sabiendo que :

a) ker*f* = L{(1, –1, 1)}.
b) A es simétrica y sin elementos negativos.
c) S_{-1} es la recta de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c} x+7y+z = 0 \\ 2x-y+2z = 0 \end{array}\right\}$.
d) $\| f(0, 1, 0) \| = \sqrt{6}$.

Proyecciones ortogonales y Diagonalización ortogonal

21) Sabiendo que *f* (1, 0, 0) = (1, 0, 1) , *f* (1, 1, 0) = (1, 1, 1) y *f* (1, 1, 1) = (2, 1, 2) , estudie si *f* es diagonalizable ortogonalmente y, en caso afirmativo, diagonalice ortogonalmente *f*.

22) Demuestre que toda proyección ortogonal es diagonalizable ortogonalmente.

23) Demuestre que los únicos autovalores de una proyección ortogonal son 0 y 1.

24) Demuestre que los subespacios propios de una proyección ortogonal *f* son ker*f* e im*f* y que son subespacios ortogonales complementarios.

25) Halle la matriz respecto de la base canónica de la proyección ortogonal de $\Re^3$ sobre la recta generada por el vector (1, 1, 1).

26) Halle una base ortonormal de vectores propios de la proyección ortogonal de $\Re^3$ sobre el plano x + y + z = 0.

27) Sabiendo que el núcleo de una proyección ortogonal *f* es la recta generada por el vector (1, –1, 1), halle la matriz de *f* respecto de la base canónica.

28) Dadas las siguientes matrices, decida a qué proyecciones ortogonales corresponden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

29) Estudie si la composición de dos proyecciones ortogonales es una proyección ortogonal. ¿Hay algún caso en que sí lo sea?

Si *f* es la proyección de $\Re^3$ sobre el plano x + 2y – z = 0 y *g* es la proyección de $\Re^3$ sobre el plano –2x + y = 0, ¿es una proyección la composición de *f* con *g*? ¿Y la composición de *g* con *f*?

Aplicaciones ortogonales

30) Sea f: $\Re^3 \to \Re^3$ la aplicación lineal definida por las ecuaciones

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 - 2x_3) \qquad y_2 = \frac{1}{3}(-2x_1 + x_2 - 2x_3) \qquad y_3 = \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 + x_3)$$

respecto de una base ortonormal B.

a) Halle la matriz A asociada a f respecto de B.
b) Pruebe que f es una aplicación ortogonal.
c) Halle el subespacio S de vectores invariantes por f. ¿Se cumple que f ($S^\perp$) = $S^\perp$?
d) ¿Cuál es el significado geométrico de la aplicación f ?

31) Halle la matriz, respecto de la base canónica de $\Re^2$, de las siguientes aplicaciones:

a) Simetría respecto de la recta x – y = 0.
b) Simetría respecto de la recta x + 2y = 0.
c) Giro de centro (0, 0) y amplitud $\frac{\pi}{6}$.
d) Composición de Giro de centro (0, 0) y amplitud $\frac{2\pi}{3}$ con Simetría respecto de la recta x+y=0. Clasificar la aplicación ortogonal resultante.

32) Halle la matriz, respecto de la base canónica de $\Re^3$, de las siguientes aplicaciones:

a) Proyección ortogonal sobre la recta r = L{ (2, –1, 0) }.
b) Simetría respecto del plano Π = { (x, y, z) / 2x – y = 0}.
c) Giro de eje la recta r = L{ (0, 1, 1) } y amplitud $\frac{\pi}{2}$.

33) Se considera el subespacio F = L{ (–1, 0, 0, 1), (1, –1, 0, 0) } del espacio euclídeo $\Re^4$. Halle el complemento ortogonal de F y obtenga la matriz de la proyección ortogonal de $\Re^4$ sobre F en la base canónica. ¿Se trata de una transformación ortogonal?

34) Sea f: $\Re^3 \to \Re^3$ una aplicación lineal que verifica las condiciones:
i) La matriz asociada a f con respecto a la base canónica A = M_f (B_c, B_c) es simétrica
ii) L{ (2, –2, –1) } es un subespacio propio de f
iii) f(1, 0, 0) = (3, 2, 2), f(0, 1, 0) = (2, 2, 0)

a) Responda razonadamente si f es una aplicación ortogonal.
b) Halle los autovalores y los subespacios propios de f .
c) Halle una forma diagonal de f y una base ortonormal en la que la matriz de f sea diagonal.

35) En $\Re^2$ se consideran las aplicaciones lineales cuyas respectivas matrices (en la base canónica) son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Estudie si son ortogonales y, en caso afirmativo, clasifíquelas

36) Estudie qué tipo de aplicaciones ortogonales de $\Re^3$ definen las siguientes matrices en base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

37) Sea f: $\Re^3 \to \Re^3$ una aplicación lineal y simétrica que conserva la norma de los vectores del plano de $\{x - z = 0\}$ y sea $S_{-1} = \{ (x, y, z) \in \Re^3 \mid x + 2y + z = 0 \}$ el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = -1$. Halle la aplicación f.